

1 Graphen

Graphen sind mathematische Modelle für netzartige Strukturen in Natur und Technik. Dazu zählen Straßennetze, Computernetze, elektrische Schaltungen, Programmablaufpläne, Wasser- und Gasleitungsnetze, chemische Moleküle oder wirtschaftliche Verflechtungsbeziehungen. Allen diesen Netzen ist eine Grundeigenschaft gemeinsam. Sie bestehen stets aus zwei verschiedenartigen Mengen von Objekten. Die Objekte der ersten Art sind zum Beispiel Orte im Straßennetz oder Computer. Sie werden durch Objekte der zweiten Art verbunden. Das sind zum Beispiel Straßen oder Übertragungsleitungen. In der Sprache der Graphentheorie werden wir diese Objekte als Knoten und Kanten eines Graphen bezeichnen. Viele Anwendungen der Graphentheorie erfordern eine Untersuchung spezieller Eigenschaften des jeweiligen Netzes. Für die Planung einer Urlaubsreise ist die Bestimmung eines *kürzesten Weges* zwischen zwei Orten eines Straßennetzes ein interessantes Problem. Eine Voraussetzung dafür ist die Kenntnis der Längen (Durchfahrzeiten) der einzelnen Straßen des Netzes. Die Bestimmung der *Zuverlässigkeit eines Kommunikationsnetzes* beantwortet die Frage nach der Wahrscheinlichkeit für die Existenz eines intakten Weges zwischen zwei Punkten des Netzes. Als Ausgangsdaten benötigt man hier neben der Netzstruktur die Ausfallwahrscheinlichkeiten der Knoten (Computer) und Kanten (Übertragungsleitungen). In der Chemie interessiert man sich für die Anzahl der *Isomere* einer Verbindung. Das sind unterschiedliche Molekülstrukturen bei gleicher chemischer Zusammensetzung. Diese Fragestellung lässt sich darstellen als Zählung von Graphen mit bestimmten Eigenschaften.

In der Graphentheorie untersucht man zunächst nur die rein topologischen Fragen einer Netzstruktur. Ein Graph ist allein durch die Menge seiner Knoten und seiner Kanten sowie durch die Zuordnung der Endknoten einer Kante bestimmt. Damit gehen in diesem abstrakten Modell alle Informationen über die konkrete Art und Beschaffenheit der Knoten und Kanten verloren. Es verbleiben jedoch erstaunlich viele Eigenschaften eines Netzes, die bereits auf dieser Abstraktionsstufe untersucht werden können. Dazu zählen die folgenden Fragen:

- Kann man die Kanten des Graphen so durchlaufen, dass man jeden Knoten (oder jede Kante) genau einmal besucht?
- Wie viele Kanten muss man mindestens durchlaufen, um von einem Knoten zu einem anderen zu gelangen?
- Wie viele Knoten muss man mindestens besetzen, damit alle anderen Knoten des Graphen in der Nachbarschaft eines besetzten Knotens liegen?

- Gibt es zwischen je zwei Knoten einen Weg?
- Wie viele Kanten kann man aus dem Graphen auswählen, sodass keine zwei ausgewählten Kanten einen gemeinsamen Endknoten besitzen?
- Wie viele verschiedene Graphen mit einer gegebenen Knoten- und Kantenanzahl gibt es? Wie viele davon sind strukturell gleich?
- Wie viele Knoten oder Kanten kann man aus einem Graphen entfernen, ohne dass dieser den Zusammenhang (oder andere wichtige Eigenschaften) verliert?
- Kann man einen gegebenen Graphen so in die Ebene zeichnen, dass sich keine zwei Kanten überkreuzen?

Die Beantwortung dieser Fragen liefert die Grundlage für die Lösung kombinatorischer Optimierungsprobleme auf Graphen und für die Konstruktion von Algorithmen zum Entwurf und zur Analyse von Netzstrukturen.

1.1 Definitionen

Wie jedes Gebiet der Wissenschaft hat auch die Graphentheorie ihren eigenen Sprachgebrauch. Wir wollen in diesem Abschnitt die wichtigsten Grundbegriffe bereitstellen.

Ein **ungerichteter Graph** $G = (V, E)$ besteht aus einer **Knotenmenge** V und einer **Kantenmenge** E , wobei jeder **Kante** $e \in E$ von G zwei (nicht notwendig verschiedene) **Knoten** aus V zugeordnet sind.

Die Bezeichnungen V und E für die Knoten- und Kantenmenge eines Graphen kommen von den englischen Wörtern **vertex** (Knoten) und **edge** (Kante). Die Anzahl der Knoten und Kanten eines Graphen werden wir häufig mit n beziehungsweise m bezeichnen. Wir beschreiben eine Kante in der Form $e = \{u, v\}$ wobei u und v die **Endknoten** der Kante e sind. Wenn v ein Endknoten der Kante e ist, so sagen wir auch v ist **inzident** zu e . Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt **endlich**, wenn die Mengen V und E endlich sind. Wir werden in diesem und den folgenden Kapiteln ausschließlich endliche ungerichtete Graphen betrachten, die wir deshalb auch kurz Graphen nennen. Im Gegensatz dazu gibt es auch gerichtete Graphen, die jedoch erst später eingeführt werden. Gerichtete Graphen enthalten Kanten, die zusätzlich einen Richtungssinn aufweisen. Auf diese Weise können zum Beispiel Straßennetze mit Einbahnstraßen modelliert werden.

Die Zugehörigkeit einer Knotenmenge V und einer Kantenmenge E zu einem Graphen G werden wir auch durch die Schreibweise $V(G)$ bzw. $E(G)$

verdeutlichen. Eine Kante der Form $e = \{v, v\}$, für welche die Endknoten zusammenfallen, heißt eine **Schlinge**. Zwei Kanten $e = \{u, v\}$ und $f = \{u, v\}$ zwischen denselben Endknoten heißen **parallel**. Ein Graph, der weder Schlingen noch parallele Kanten besitzt, heißt ein **schlichter Graph**. Um einen Graphen graphisch zu veranschaulichen, stellen wir die Knoten als Punkte oder kleine Kreise dar. Eine Kante wird durch eine Strecke oder eine Kurve, die zwei Knoten verbindet, dargestellt. Das Bild 1.1 zeigt einen Graphen mit fünf Knoten und sechs Kanten. Dieser Graph kann auch eindeutig durch die Angabe seiner Knotenmenge, seiner Kantenmenge und der Endknoten jeder Kante beschrieben werden. Wir erhalten

$$G = (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{a, b, c, d, e, f\})$$

mit

$$a = \{1, 2\}, b = \{1, 5\}, c = \{1, 3\}, d = \{1, 3\}, e = \{2, 4\}, f = \{5, 5\}.$$

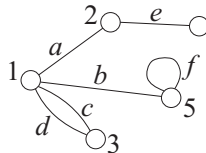


Bild 1.1: Ein ungerichteter Graph

Diese Information lässt sich auch in Form einer Tabelle speichern:

Kante	a	b	c	d	e	f
Endknoten	1	1	1	1	2	5
	2	5	3	3	4	5

1.1.1 Knotengrade

Zwei Knoten $u, v \in V(G)$, die durch eine Kante $e = \{u, v\}$ verbunden sind, heißen **adjacent** (benachbart) in G . Die Menge $N(v)$ aller zu einem Knoten $v \in V(G)$ adjazenten Knoten nennen wir die **Nachbarschaft** von v . Der **Grad** $\deg v$ eines Knotens $v \in V(G)$ ist die Anzahl der von v ausgehenden Kanten in G (die Anzahl der zu v inzidenten Kanten von G). Schlingen werden hierbei doppelt gezählt. Ein **isolierter Knoten** ist ein Knoten vom Grade null. Ein isolierter Knoten besitzt keine Nachbarknoten. In einem schlichten Graphen gilt $\deg v = |N(v)|$. Nun können wir bereits einen ersten Satz formulieren.

Satz 1.1

In einem Graphen $G = (V, E)$ mit m Kanten gilt stets

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2m.$$

Beweis: Die links stehende Summe zählt für jeden Knoten die Kanten, die von diesem Knoten ausgehen. Dabei wird jedoch jede Kante genau zweimal gezählt. $\square$

Da die Summe der Knotengrade in diesem Satz stets eine gerade Zahl liefert, erhalten wir auch die folgende Aussage.

Folgerung 1.2

Die Anzahl der Knoten eines Graphen mit einem ungeraden Grad ist stets eine gerade Zahl.

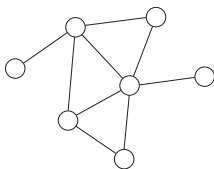


Bild 1.2: Ein Graph mit $\delta(G) = 1$ und $\Delta(G) = 5$

Der **Maximalgrad** $\Delta(G)$ eines Graphen G ist das Maximum der Grade aller Knoten von G :

$$\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} \deg v$$

Analog ist der **Minimalgrad** $\delta(G)$ durch

$$\delta(G) = \min_{v \in V(G)} \deg v$$

definiert. Das Bild 1.2 zeigt einen Graphen mit dem Minimalgrad 1 und dem Maximalgrad 5.

1.1.2 Wege und Kreise

Eine **Kantenfolge** ist eine Folge

$$v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k$$

von Knoten und Kanten eines Graphen G , sodass die Kante e_i für $i = 1, \dots, k-1$ jeweils die Endknoten v_i und v_{i+1} besitzt. Wir sagen auch, diese Kantenfolge **verbindet** v_1 mit v_k . Die **Länge** der Kantenfolge ist die Anzahl der Kanten dieser Folge. Wir werden formal auch einen einzelnen Knoten als eine Kantenfolge der Länge null betrachten. Eine Kantenfolge in einem Graphen $G = (V, E)$ ist ein **Weg**, wenn jeder Knoten aus V höchstens einmal in dieser Folge auftritt. In einem Weg kann somit auch keine Kante doppelt vorkommen. Gilt $v_1 = v_k$ in der Kantenfolge

$$v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k,$$

so sprechen wir von einer **geschlossenen Kantenfolge**. Kommt, mit Ausnahme von v_k , kein Knoten doppelt in der geschlossenen Kantenfolge vor, so bildet diese Folge einen **Kreis** des Graphen. Wege und Kreise eines Graphen sind eindeutig durch die Menge der Kanten der jeweiligen Kantenfolge bestimmt. Eine Schlinge bildet einen Kreis der Länge 1; ein paralleles Kantenpaar bildet einen Kreis der Länge 2. In einem schlichten Graphen haben alle Kreise eine Länge von mindestens 3. Einen Kreis der Länge 3 nennen wir auch ein **Dreieck**.

1.1.3 Zusammenhang

Ein Graph $H = (W, F)$ ist ein **Untergraph** des Graphen $G = (V, E)$, wenn $W \subseteq V$ und $F \subseteq E$ gilt. Es sei $W \subseteq V(G)$ eine Teilmenge der Knotenmenge des Graphen G . Ein Untergraph $H = (W, F)$ von G , der alle Kanten aus G enthält, die zwei Knoten aus W verbinden, heißt ein von der Teilmenge W **induzierter Untergraph** von G . Ein **aufspannender Untergraph** $H = (V, F)$ eines Graphen $G = (V, E)$ besitzt dieselbe Knotenmenge wie der Ausgangsgraph.

Das Bild 1.3 zeigt einen Graphen und einen darin enthaltenen Untergraphen. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt **zusammenhängend**, wenn zwischen je zwei Knoten u und v seiner Knotenmenge ein Weg existiert. Ein maximaler zusammenhängender Untergraph eines Graphen G heißt eine **Komponente** von G . Das Bild 1.4 zeigt einen nicht zusammenhängenden Graphen mit vier Komponenten. Wenn H ein Untergraph von G ist, so gilt für den Maximalgrad $\Delta(H) \leq \Delta(G)$. Gilt diese Relation auch für den Minimalgrad?

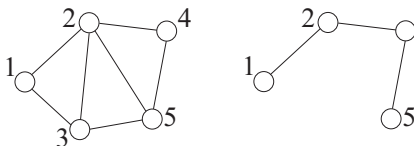


Bild 1.3: Ein Graph und ein Untergraph dieses Graphen

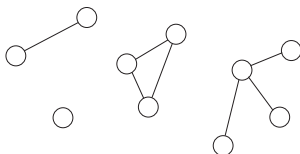


Bild 1.4: Ein nicht zusammenhängender Graph

1.2 Operationen mit Graphen

Für die Beschreibung von Eigenschaften von Graphen und für die Berechnung von Kenngrößen von Graphen sind oft strukturelle Umformungen eines Graphen erforderlich. Wir beschreiben im Folgenden einige wichtige Operationen mit Graphen.

1.2.1 Entfernen von Knoten und Kanten

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Das **Entfernen einer Kante** $e \in E$ erzeugt aus G einen neuen Graphen $G - e = (V, E \setminus \{e\})$. Wenn $F \subseteq E$ eine Kantenmenge des Graphen $G = (V, E)$ ist, so sei $G - F$ der Graph, der aus G durch Entfernen aller Kanten aus F hervorgeht. Man überzeugt sich leicht, dass die Reihenfolge des Entferns der Kanten aus F hierbei keine Rolle spielt.

Für einen Knoten $v \in V$ definieren wir $G - v$ als den Graphen, der aus G durch **Entfernen des Knotens** v hervorgeht. Das Entfernen eines Knotens v schließt hierbei das gleichzeitige Entfernen aller zu v inzidenten Kanten des Graphen ein. Auch diese Operation verallgemeinern wir für eine beliebige Knotenmenge $X \subseteq V$. Der Graph $G - X$ ist dann der Graph, der durch Entfernen aller Knoten aus X aus dem Graphen G hervorgeht.

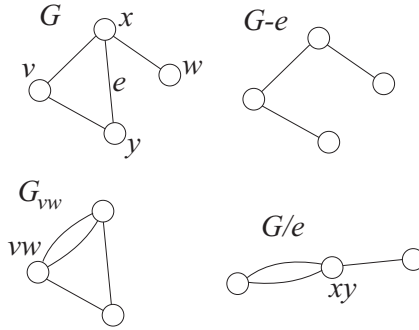


Bild 1.5: Knoten- und Kantenoperationen mit Graphen

1.2.2 Fusion und Kontraktion

Die **Fusion** (das **Verschmelzen**) von zwei Knoten u und v eines Graphen $G = (V, E)$ ist das Identifizieren dieser beiden Knoten in einem Knoten, der zu allen Kanten inzident ist, die vorher einen dieser beiden Knoten als Endknoten hatten. Wir bezeichnen den entstehenden Graphen mit G_{uv} . Auch für diese Operation lassen wir eine Verallgemeinerung auf eine beliebige Teilmenge $X \subseteq V$ zu, durch deren Fusion dann der Graph G_X entsteht.

Die **Kontraktion** einer Kante $e = \{u, v\}$ eines Graphen G ist das Entfernen von e mit der anschließenden Fusion der Endknoten u und v . Wir bezeichnen den durch Kontraktion von e aus G hervorgehenden Graphen mit G/e . Das Bild 1.5 zeigt die hier vorgestellten Operationen an einem Beispielgraphen.

Ein Graph H , der aus einem Graphen G durch ausschließliche Anwendung der drei Operationen Entfernen einer Kante, Kontraktion einer Kante und Entfernen eines isolierten Knotens hervorgeht, heißt ein **Minor** von G .

Es sei $e = \{u, v\}$ eine Kante des Graphen $G = (V, E)$ und $s, t \in V$. Wenn in G ein Weg von s nach t existiert, so existiert auch in G/e ein Weg von s nach t . Um dies einzusehen, betrachten wir zwei Fälle:

- Die Kante e liegt auf dem st -Weg. Es sei

$$s, \dots, e_j, u, e, v, e_k, \dots, t$$

dieser Weg. Durch Kontraktion der Kante e fallen die beiden Endknoten u und v zusammen, wobei der neue Knoten uv entsteht. Dieser ist zu e_j und e_k inzident, sodass der Weg in den kürzeren Weg

$$s, \dots, e_j, uv, e_k, \dots, t$$

übergeht. Wenn s und t mit u und v übereinstimmen und somit die Endknoten der Kante e sind, so besitzt der entstehende Weg die Länge null.

- Liegt die Kante e nicht auf dem Weg von s nach t , so bleibt dieser Weg unverändert auch in G/e erhalten.

Da die Anzahl der Knoten durch Kontraktionen nur abnehmen kann, erhalten wir die folgende Aussage.

Satz 1.3

Ein Graph G ist genau dann zusammenhängend, wenn G durch eine Folge von Kontraktionen in einen Graphen mit genau einem Knoten übergeht.

1.2.3 Brücken und Artikulationen

Es sei $c(G)$ die Anzahl der Komponenten eines Graphen G . Eine Kante $e \in E$ eines Graphen $G = (V, E)$ mit der Eigenschaft $c(G - e) > c(G)$ heißt eine **Brücke** von G . Ein Knoten $v \in V$ mit der Eigenschaft $c(G - v) > c(G)$ heißt eine **Artikulation** von G . In einem zusammenhängendem Graphen G sind Brücken und Artikulationen genau solche Kanten und Knoten, deren Entfernen aus G den Zusammenhang zerstört.

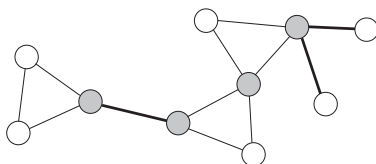


Bild 1.6: Brücken und Artikulationen

Bild 1.6 zeigt einen Beispielgraphen mit drei Brücken und vier Artikulationen. Alle Brücken in diesem Graphen werden durch stärkere Kanten repräsentiert. Die Artikulationen sind die grau dargestellten Knoten.

1.2.4 Operationen mit Graphen

Das **Komplement** oder der **Komplementärgraph** $\bar{G} = (V, \bar{E})$ eines schlichten Graphen $G = (V, E)$ besitzt dieselbe Knotenmenge V wie der Ausgangsgraph. Jedoch sind in $\bar{G}$ genau dann zwei Knoten adjazent, wenn sie in G nicht adjazent sind. Das Bild 1.7 zeigt einen Graphen G und sein Komplement $\bar{G}$.

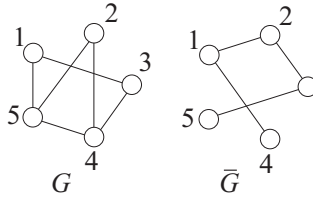


Bild 1.7: Komplement eines Graphen

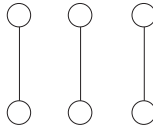


Bild 1.8: Disjunkte Vereinigung von Graphen

Die **Vereinigung** von zwei Graphen $G = (V, E)$ und $H = (W, F)$ ist der Graph mit der Knotenmenge $V \cup W$ und der Kantenmenge $E \cup F$. Wir bezeichnen diesen Graphen mit dem üblichen Vereinigungssymbol $G \cup H = (V \cup W, E \cup F)$. Wenn die Knotenmengen der beiden Graphen G und H übereinstimmen, so entsteht der Graph $(V, E \cup F)$ als Vereinigung.

Manchmal möchten wir jedoch einen Graphen „mit sich selbst“ vereinigen. Das verstehen wir so, dass zunächst eine **disjunkte Kopie** des Graphen geschaffen wird, die dann in die Vereinigung eingeht. Wir schreiben in diesem Falle $G \uplus G$, um die **disjunkte** Vereinigung hervorzuheben. Wenn $G = (\{1, 2\}, \{(1, 2)\})$ ein Graph mit zwei Knoten und einer Kante ist, so ist der Graph $3G = G \uplus G \uplus G$ der in Bild 1.8 dargestellte Graph.

Das **Produkt** $G \times H$ (oder auch $G \square H$) der Graphen $G = (V, E)$ und $H = (W, F)$ ist ein Graph mit der Knotenmenge $V \times W = \{(v, w) : v \in V, w \in W\}$. Zwei Knoten (v_1, w_1) und (v_2, w_2) von $G \times H$ sind genau dann adjazent, wenn $v_1 = v_2$ gilt und w_1 und w_2 in H adjazent sind oder wenn $w_1 = w_2$ gilt und v_1 und v_2 in G adjazent sind. Bild 1.9 zeigt ein Beispiel für die Produktbildung von Graphen.

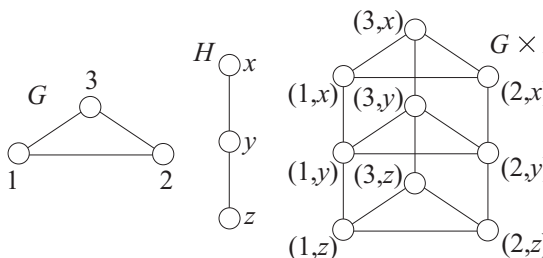


Bild 1.9: Das Produkt von Graphen

1.3 Spezielle Graphen

Einige Graphen treten in verschiedenen Anwendungen und Beispielen immer wieder auf. Diese Graphen wollen wir in diesem Abschnitt beschreiben.

1.3.1 Der vollständige Graph

Ein **vollständiger Graph** K_n mit n Knoten besitzt zwischen je zwei seiner Knoten genau eine Kante.

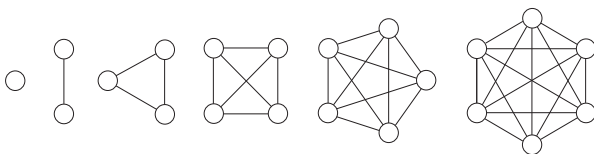


Bild 1.10: Vollständige Graphen

Das Bild 1.10 zeigt vollständige Graphen mit bis zu sechs Knoten. Wie viele Kanten besitzt ein vollständiger Graph mit n Knoten? Die Antwort liefert Satz 1.1. Jeder Knoten besitzt den Grad $n - 1$, da alle anderen Knoten als Nachbarn auftreten. Damit gilt

$$\sum_{v \in V} \deg v = \sum_{v \in V} (n - 1) = n(n - 1) = 2m$$

und folglich

$$m = \frac{n(n - 1)}{2} = \binom{n}{2}.$$

Eine andere Überlegung führt ebenfalls zum Ziel. Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{2}$ zählt die Anzahl der Auswahlen von 2 aus n Elementen. Jede Kante ist aber eindeutig durch die Wahl ihrer Endknoten bestimmt. Folglich besitzt der vollständige Graph mit n Knoten genau $\binom{n}{2}$ Kanten.

Das Komplement $\bar{K}_n$ des vollständigen Graphen mit n Knoten ist der **leere Graph** (oder auch **kantenlose Graph**). Er besteht aus n isolierten Knoten vom Grade null. Der leere Graph $\bar{K}_n$ ist für $n > 1$ nicht zusammenhängend; er besitzt n Komponenten.

1.3.2 Weg und Kreis

Der **Weg** P_n besitzt die Knotenmenge $\{1, \dots, n\}$ und die Kantenmenge

$$\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}\}.$$

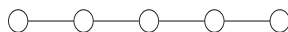


Bild 1.11: Der Weg P_5

Das Bild 1.11 zeigt den Weg P_5 . Die Bezeichnung P_n für einen Weg stammt vom englischen Wort **path**. Wenn wir den ersten und letzten Knoten des Weges P_n durch eine zusätzliche Kante verbinden, so erhalten wir den **Kreis** (**cycle**) C_n . Das Bild 1.12 zeigt den Kreis C_6 .

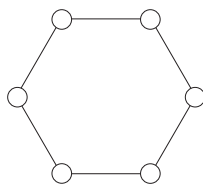


Bild 1.12: Der Kreis C_6

1.3.3 Bäume

Ein **Baum** ist ein zusammenhängender Graph, der keinen Kreis besitzt. Für einen Baum mit n Knoten verwenden wir die Bezeichnung T_n (von **tree**). Im Gegensatz zu den bisher vorgestellten speziellen Graphen können Bäume auch

bei übereinstimmender Knotenanzahl sehr unterschiedliche Struktur aufweisen. Das Bild 1.13 zeigt einige Bäume mit sechs Knoten. In einem Baum ist jede Kante eine Brücke. Andernfalls würde die Existenz eines Kreises folgen.

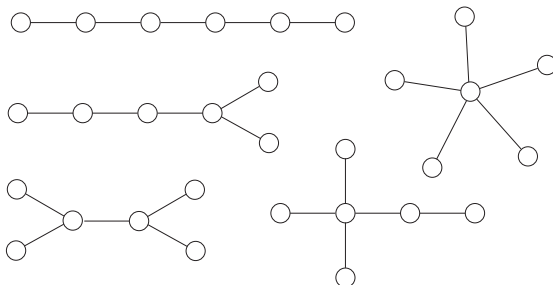


Bild 1.13: Bäume mit sechs Knoten

Satz 1.4

Ein Baum mit n Knoten besitzt genau $n - 1$ Kanten.

Beweis: Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach der Anzahl der Knoten des Baumes. Für Bäume mit 1 oder zwei Knoten ist der Satz wahr. In beiden Fällen existiert genau ein Baum ohne Kanten bzw. mit genau einer Kante. Wir nehmen nun an, dass der Satz für alle Bäume mit höchstens n Knoten wahr ist. Es sei T_{n+1} ein Baum mit $n + 1$ Knoten und e eine Kante dieses Baumes. Da e auch eine Brücke ist, besteht der Graph $T_{n+1} - e$ aus zwei Komponenten G und H , die wiederum Bäume sind. Die Anzahl der Knoten von G und H sei g und h . Dann gilt

$$g + h = n + 1.$$

Außerdem hat G nach Induktionsannahme genau $g - 1$ Kanten und H genau $h - 1$ Kanten. Die beiden Komponenten zusammen besitzen folglich

$$g + h - 2 = n - 1$$

Kanten, die gleichzeitig auch Kanten des Baumes T_{n+1} sind. Mit der Kante e hat folglich T_{n+1} genau n Kanten. Damit gilt die Aussage auch für T_{n+1} und somit für alle Bäume. $\square$

1.3.4 Bipartite Graphen

Ein **bipartiter Graph** $G = (V, E)$ besitzt eine Knotenmenge $V = U \cup W$, die in zwei disjunkte Teilmengen U und W zerfällt, sodass alle Kanten des Graphen genau einen Endknoten in U und einen Endknoten in W haben. Das Bild 1.14 zeigt einen bipartiten Graphen mit sieben Knoten. Weitere Beispiele für bipartite Graphen sind Wege, Bäume und Kreise gerader Knotenzahl.

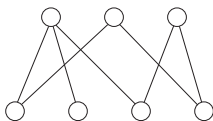


Bild 1.14: Ein bipartiter Graph

Satz 1.5

Ein Graph G ist genau dann bipartit, wenn alle Kreise von G gerade Länge besitzen.

Beweis: Angenommen $G = (U \cup W, E)$ ist bipartit, wobei alle Kanten von E jeweils einen Endknoten in U und in W haben. Es sei C ein Kreis von G . Wir durchlaufen den Kreis C , beginnend in einem Knoten aus U . Dann muss der nächste Knoten, den wir erreichen, in W liegen. Von diesem Knoten gelangen wir wieder zu einem Knoten aus U . Allgemein gehört genau jeder zweite Knoten auf diesem Weg zu U . Damit müssen wir eine gerade Anzahl von Kanten durchlaufen, um diesen Kreis zu schließen.

Es sei nun umgekehrt G ein Graph, der ausschließlich Kreise gerader Länge besitzt. Wir teilen die Knotenmenge $V(G)$ in zwei disjunkte Teilmengen U und W wie folgt auf. Wir wählen einen beliebigen Knoten $v \in V$ und setzen $U = \{v\}$. Alle Nachbarknoten von v bilden die Menge W . Nun erweitern wir U um alle Nachbarn von Knoten aus W . Diese Knoten können nicht selbst aus W sein, da andernfalls ein Kreis ungerader Länge in G vorhanden wäre. Das heißt insbesondere, dass es keine Kante $e \in E$ gibt, deren Endknoten beide in W liegen. Die Menge U wird nun um alle Nachbarn von W erweitert, wobei wieder kein Knoten aus U zu dieser Nachbarschaft gehören kann. Damit gibt es auch keine Kante, die Knoten aus U untereinander verbindet. Diese Konstruktion wird alternierend fortgesetzt bis eine der Mengen unverändert bleibt. Wenn G zusammenhängend ist, sind wir fertig. Andernfalls wiederholen wir diese Konstruktion für jede Komponente und vereinigen anschließend jeweils alle U -Mengen und alle W -Mengen der Komponenten. $\square$

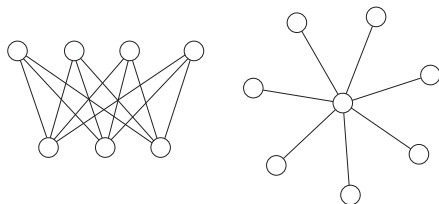


Bild 1.15: Vollständige bipartite Graphen

Der **vollständige bipartite Graph** $K_{p,q}$ besitzt eine Knotenmenge $V \cup W$ mit $p+q$ Knoten, sodass jeder der p Knoten von V zu jedem der q Knoten von W adjazent ist. Der Graph $K_{p,q}$ besitzt damit genau pq Kanten. Der Graph $K_{1,q}$ heißt auch ein **Stern**. Das Bild 1.15 zeigt die vollständigen bipartiten Graphen $K_{3,4}$ und $K_{1,7}$.

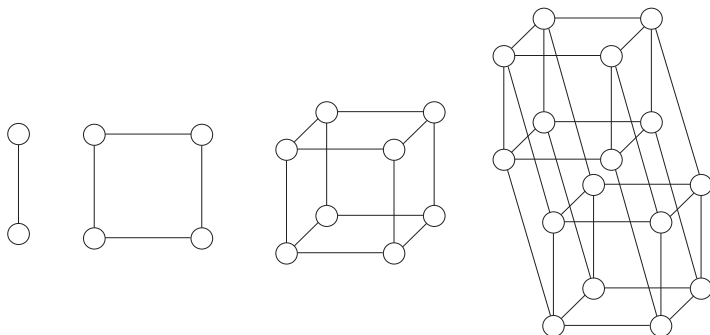


Bild 1.16: Hyperwürfel der Dimensionen 1, 2, 3 und 4

1.3.5 Reguläre Graphen

Ein **regulärer Graph** (**regulärer Graph vom Grade r , r -regulärer Graph**) ist ein Graph, dessen Knoten alle denselben Grad (den Grad r) besitzen. Beispiele für reguläre Graphen sind Kreise und vollständige Graphen. Ein r -regulärer Graph mit n Knoten besitzt genau $rn/2$ Kanten. Für einen r -regulären Graphen stimmen Minimalgrad und Maximalgrad überein:

$$\delta(G) = \Delta(G) = r$$

Der n -dimensionale Hyperwürfel Q_n ist das n -fache Produkt eines Weges P_2 mit sich (die n -te Potenz):

$$Q_n = \underbrace{P_2 \times P_2 \times \dots \times P_2}_{n\text{-mal}} = P_2^n$$

Das Bild 1.16 zeigt die Hyperwürfel Q_1 bis Q_4 .

1.4 Isomorphe Graphen

Wann sind zwei Graphen gleich? Die Beantwortung dieser Frage scheint zunächst ganz einfach. Zwei Graphen sind genau dann **gleich**, wenn ihre Knoten- und Kantenmengen sowie die Inzidenzrelationen zwischen Knoten und Kanten übereinstimmen.

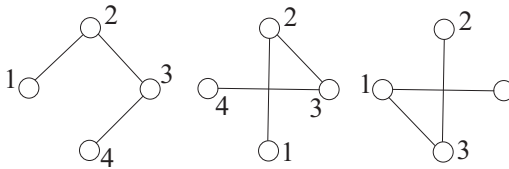


Bild 1.17: Gleiche und isomorphe Graphen

Schauen wir uns die Graphen aus Bild 1.17 etwas genauer an. Die ersten beiden Graphen stimmen offenbar völlig überein, obwohl ihre Darstellungen in der Ebene (ihre Zeichnungen) unterschiedlich aussehen. Der rechts im Bild 1.17 dargestellte Graph unterscheidet sich jedoch von den anderen beiden. So besitzt hier zum Beispiel der Knoten 2 den Grad 1; in den anderen beiden Graphen besitzt dieser Knoten den Grad 2. Außerdem sind im rechten Graphen die Knoten 1 und 4 adjazent, was in den anderen Graphen nicht der Fall ist. Dennoch sind in allen drei Fällen Wege der Länge 3 dargestellt. Die Struktur dieser Graphen stimmt überein. Um diese strukturelle Übereinstimmung zu beschreiben, führen wir einen weiteren Äquivalenzbegriff für Graphen ein.

1.4.1 Isomorphie

Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $H = (W, F)$ heißen **isomorph**, wenn es eine Bijektion $\phi : V \rightarrow W$ gibt, sodass für alle $v, w \in V$ die Anzahl der Kanten zwischen v und w in G gleich der Anzahl der Kanten zwischen $\phi(v)$ und $\phi(w)$

in H ist. Etwas einfacher gesagt: Die Graphen G und H sind isomorph, wenn H durch Umnummerierung der Knoten aus G hervorgeht. Viele strukturelle Eigenschaften von Graphen bleiben beim Übergang zu einem isomorphen Graphen erhalten. Dazu zählen Minimalgrad, Maximalgrad, Zusammenhang und die Anzahl der Komponenten. Solche Eigenschaften nennen wir auch **Grapheninvarianten**.

Dass die Isomorphie von Graphen im Allgemeinen nicht leicht erkennbar ist, zeigt uns das Bild 1.18. Zwei der hier dargestellten Graphen sind tatsächlich isomorph – aber welche? Eine Hilfe für den Test auf Isomorphie von Graphen sind die Grapheninvarianten. Wenn eine Grapheninvariante für zwei Graphen nicht übereinstimmt, so sind diese Graphen mit Sicherheit nicht isomorph. So müssen zum Beispiel Knotenzahl, Kantenanzahl und Maximalgrad von isomorphen Graphen übereinstimmen.

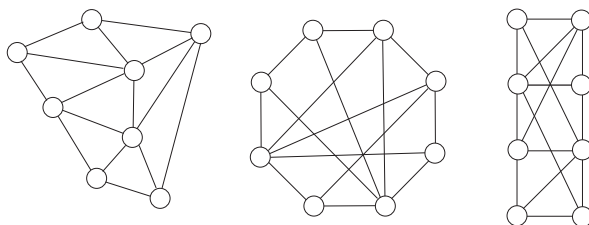


Bild 1.18: Isomorphe Graphen?

1.4.2 Gradfolgen

Auch die Anzahl der Knoten eines gegebenen Grades ist eine Grapheninvariante. Mit diesen Anzahlen definieren wir die **Gradfolge**

$$(d_1, \dots, d_n) = (\deg v_1, \dots, \deg v_n)$$

eines Graphen. Wir werden stets voraussetzen, dass die Zahlen d_i der Gradfolge aufsteigend sortiert sind. Damit gilt

$$\delta(G) = d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n = \Delta(G).$$

Aus dem Satz 1.1 lassen sich einige Aussagen über die Gradfolge eines Graphen gewinnen. Speziell für Bäume erhalten wir die folgende Behauptung.

Folgerung 1.6 Für einen Baum T_n mit $n \geq 2$ gilt

$$d_1 = d_2 = 1.$$

Beweis: Nach dem Satz 1.1 gilt

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2m,$$

wobei m die Kantenzahl des Baumes bezeichnet. Da nach Satz 1.4 T_n genau $n - 1$ Kanten besitzt, folgt auch

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2.$$

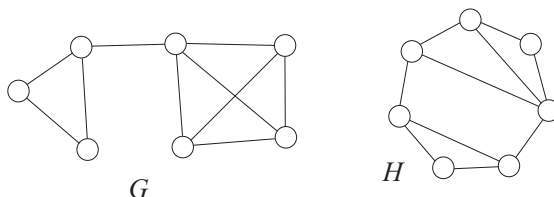
Da ein Baum ein zusammenhängender Graph ist, gilt $d_i > 0$ für $i = 1, \dots, n$. Wären alle Zahlen $d_i \geq 2$, so würde ihre Summe mindestens $2n$ liefern. Folglich sind mindestens zwei Summanden kleiner als zwei, somit gleich eins. $\square$

Das Bild 1.18 zeigt uns, dass Graphen auch bei übereinstimmender Gradfolge nicht isomorph sein müssen. Wie sehen wir, dass in diesem Bild der linke und der mittlere Graph nicht isomorph sind? Knotenzahl, Kantenzahl und Gradfolge stimmen für beide Graphen überein. Beide Graphen enthalten genau zwei Knoten vom Grade 5. Im linken Graphen sind jedoch diese beiden Knoten adjazent, was im mittleren Graphen des Bildes 1.18 nicht der Fall ist. Wir können folglich die geforderte Bijektion, die alle Adjazenzrelationen erhält, nicht finden – die Graphen sind nicht isomorph.

Aufgaben

- 1.1 Wie viele verschiedene Wege der Länge k gibt es zwischen zwei beliebigen Knoten des vollständigen Graphen K_n ?
- 1.2 Finden Sie einen Graphen G , in dem eine Kante e mit der Eigenschaft $\Delta(G/e) > \Delta(G)$ existiert.
- 1.3 Bestimmen Sie alle nichtisomorphen Bäume mit sechs Knoten.
- 1.4 Wie kann man aus einer Kantenfolge zwischen den Knoten u und v eines Graphen G einen Weg zwischen u und v erhalten?
- 1.5 Zeichnen Sie einen Graphen mit der Gradfolge $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$. Gibt es auch einen schlichten Graphen mit dieser Gradfolge?

1.6 Sind die beiden hier dargestellten Graphen isomorph?



- 1.7 Zeichnen Sie die Graphen $C_3 \times P_4$ und $P_2 \times P_3 \times P_4$.
- 1.8 Wie viele Knoten und Kanten besitzt der Graph $G_1 \times G_2$, wenn G_i genau n_i Knoten und m_i Kanten besitzt ($i = 1, 2$)?
- 1.9 Wie viele Artikulationen kann ein Graph mit n Knoten höchstens besitzen?
- 1.10 Zeichnen Sie alle nichtisomorphen schlichten Graphen mit 6 Knoten und 7 Kanten.
- 1.11 Wie viele verschiedene schlichte Graphen mit n Knoten und m Kanten gibt es? Hierbei sind auch isomorphe Graphen als verschieden anzusehen, wenn für wenigstens ein Knotenpaar die Adjazenzrelation unterschiedlich ausfällt.
- 1.12 Zeichnen Sie einen schlichten 3-regulären bipartiten Graphen mit 8 Knoten.
- 1.13 Wie viele Kanten kann ein schlichter bipartiter Graph mit n Knoten maximal haben?
- 1.14 Die Knotenmenge eines schlichten Graphen sei die Menge aller zweielementigen Teilmengen der Menge $\{1, \dots, 6\}$. Zwei Knoten A, B ($A \neq B$) seien genau dann adjazent, wenn $A \cap B \neq \emptyset$ gilt. Wie viele Kanten hat dieser Graph?
- 1.15 Ein schlichter Graph G mit 20 Knoten habe den Minimalgrad $\delta(G) = 10$.
- (a) Wie viele Kanten muss G mindestens besitzen?
 - (b) Warum muss G ein zusammenhängender Graph sein?